RdP 1 Sonderübung 5 WS 08/09

(1) Ein sehr langer gerader Stab $(-L \leq x \leq L)$ besitzt eine ortsabhängige elektrische Ladungsdichte $q(x) = q_0\, e^{-\gamma|x|} \cos\omega x$ mit $\gamma > 0$. Man berechne für $L \to \infty$ die Gesamtladung Q des Stabs mit Hilfe der Euler-Formel. (Symmetrie?)

(2) Betrachten Sie eine Gerade in der Ebene, die nicht durch den Ursprung geht. Die Punkte $\vec{r}$ auf der Geraden erfüllen in der impliziten Darstellung die Gleichung $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ mit einem Einheitsvektor $\vec{n}$.

(a) Welche Bedeutung haben $\vec{n}$ und d?

(b) Legen Sie im Folgenden die x-Achse in $\vec{n}$-Richtung. Welche Abhängigkeit $r = r(\varphi)$ bekommen Sie damit in Polarkoordinaten $\vec{r} \doteq (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$?

(c) Gesucht ist eine Parametrisierung der Geraden nach ihrer Bogenlänge: $\vec{r} \doteq (r(s)\cos\varphi(s), r(s)\sin\varphi(s))$ mit $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1 \iff (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.
Bestimmen Sie zunächst $ds = \ldots d\varphi$. Daraus erhalten Sie $s(\varphi) \to \varphi(s) \to r(s)$.

(d) Rechnen Sie zurück in kartesische Koordinaten $(x(s), y(s))$. Resultat erwartet?

Hinweis: $\tan'\varphi = 1 + \tan^2\varphi = 1/\cos^2\varphi$. Skizze!

(3) Unter dem Einfluß einer Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = -K\vec{r}$ wird eine Punktmasse von $\vec{r}_1 \doteq (3a, 0)$ nach $\vec{r}_2 \doteq (3a, 4a)$ bewegt. Welche Arbeit $A = -\int_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r})$ ist zu leisten auf den Wegen (Skizzen!)

[gegen die Kraft]

(a) $\mathcal{C}$ = Geradenstück von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$

(b) $\mathcal{C}$ = Halbkreis von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$, mit Zentrum $\vec{r}_0 \doteq (3a, 2a)$ & Radius $2a$

Bestimmen Sie auch das Potenzial $V(\vec{r})$ und verifizieren Sie $A = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)$.

(4) Elliptische Koordinaten in der Ebene sind gegeben durch

$$x = a\,\mathrm{ch}\,u \cos v, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,u \sin v, \quad \text{mit } u \in [0,\infty),\ v \in [0, 2\pi).$$

(a) Verifizieren Sie, dass u=konst. Ellipsen und dass v=konst. Hyperbeln sind.

(b) Berechnen Sie $\partial_u\vec{r} = b_u\vec{e}_u$, $\partial_v\vec{r} = b_v\vec{e}_v$ sowie $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ und $G = J^T J$.

(c) Geben Sie Linien- und Flächenelement in elliptischen Koordinaten an.

(d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $I = \int_F df$ einer Ellipse F (Skizze!), die durch $u = R$ = konst. gegeben ist. Drücken Sie I aus durch die Halbachsen A & B.

(5) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Halbkugel-Oberfläche (Radius R) $\vec{r}(\rho,\varphi) \doteq (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \sqrt{R^2-\rho^2})$ mit $\rho \in [0,R]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.